מבוא מתמטי לפיזיקה 1 — תרגול 2

מתרגל: אליאור אוריסמן

תוכן העניינים

1 נגזרות חזרה ותרגול 2

1.1 הגדרת הנגזרת 2

1.2 נגזרות שימושיות 2

1.3 כלל השרשרת 2

2 פוקנציות הופכיות 2

3 דוגמה 3

4 דוגמה 4

5 דוגמה 6

6 דוגמה 7

7 דוגמה 8

8 דוגמה 8

9 דוגמה 9

1 נגזרות חזרה ותרגול

1.1 הגדרת הנגזרת

$$\frac{df}{dx}|_{x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.1}$$

1.2 נגזרות שימושיות

ניתן להוכיח בעזרת הגדרת הנגזרת:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \ln(x) \equiv \log_e(x)$

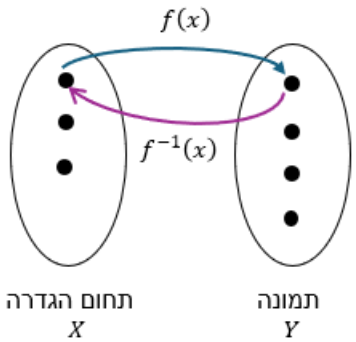
1.3 כלל השרשרת

כאשר אנחנו מעוניינים לגזור פונקציה שתלויה בפונקציה אחרת.

$$f(g(x))' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = f'(g(x))\, g'(x). \tag{1.2}$$

2 פוקנציות הופכיות

פונקציה הופכית $f^{-1}(x)$ היא פונקציה שמבצעת את הפעולה ההופכה מ-$f(x)$.



איור 1: פעולת הפונקציה $f(x)$ ופעולת הפונקציה ההופכית $f^{-1}(x)$.

מתמטית זה אומר

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x. \tag{2.1}$$

כדי ל-f תיהיה הופכית צריך לדאוג ש-f היא פונקציה חד-חד ערכית: לכל איבר X יש איבר אחד ויחיד ב-Y והפוך. אנחנו לא נתעסק עם צמצום תחומי הגדרה בקורס. נתמקד בטכניקה של מציאת הפונקציה ההופכית והנגזרת שלה. מההגדרה למעלה ניתן לקחת נגזרת לשתי האגפים ולקבל קשר בין הנגזרות

$$\left(f^{-1}\right)'\left(x\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(x\right)\right)}. \tag{2.2}$$

3 דוגמה

שאלה 1

גזרו את הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{e^{x^2}}{1-2x}$. כמו כן - בדקו את הגבול מסביב לנקודה $x=\frac{1}{2}$.

פתרון : נגזור את הפונקציה בנקודה כללית (נעזר בכלל הנגזרת עבור מנה כפי שהוכחתם בתרגיל בית 1)

$$f'\left(x\right)=\frac{\left(2xe^{x^2}\right)\left(1-2x\right)-e^{x^2}\left(-2\right)}{\left(1-2x\right)^2}=-2\frac{e^{x^2}\left(x-1\right)\left(1+2x\right)}{\left(1-2x\right)^2}. \tag{3.1}$$

נשים לב שכדי לגזור את e^{x^2} השתמשנו בכלל השרשרת : $h\left(x\right)=e^{g(x)}$ עם $g\left(x\right)=x^2$. לכן $h'\left(x\right)=\frac{dh(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}=e^{x^2}\cdot\left(2x\right)$. כמו כן - נבדוק איך הפונקציה מתנהגת מסביב לנקודה $x=\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{e^{x^2}}{1-2x}=\left\{y=1-2x\right\}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\left(\frac{1-y}{2}\right)^2}}{y}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{e^{x^2}}{1-2x}=\left\{y=1-2x\right\}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\left(\frac{1-y}{2}\right)^2}}{y}=+\infty.$$

4 דוגמה

שאלה 2

גזרו את הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{4\ln(x)+2}$ פעמיים. כמו כן - בדקו את הגבול מסביב לנקודה $x=e^{-\frac{1}{2}}$.

פתרון : אפשר לגזור לפי כלל המנה

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\left(4\ln(x)+2\right)-x^2\left(\frac{4}{x}\right)}{\left(4\ln(x)+2\right)^2} \\
&= \frac{8x\ln(x)+\cancel{4x}-\cancel{4x}}{\left(4\ln(x)+2\right)^2} \\
&= \frac{2x\ln(x)}{\left(2\ln(x)+1\right)^2}
\end{aligned}$$

גזירה נוספת תעשה שוב פעם לפי כלל המנה

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\left(2\ln(x)+2x\frac{1}{x}\right)\left(2\ln(x)+1\right)^2-2x\ln(x)\,2\left(2\ln(x)+1\right)\frac{2}{x}}{\left(2\ln(x)+1\right)^4} \\
&= \frac{\left[\left(2\ln x+2\right)\left(2\ln(x)+1\right)-8\ln(x)\right]\left(2\ln(x)+1\right)}{\left(2\ln(x)+1\right)^4} \\
&= \frac{\left(2\ln(x)+2\right)\left(2\ln(x)+1\right)-8\ln(x)}{\left(2\ln(x)+1\right)^3} \\
&= \frac{4\ln^2(x)+6\ln(x)+2-8\ln(x)}{\left(2\ln(x)+1\right)^3} \\
&= \frac{4\ln^2(x)-2\ln(x)+2}{\left(2\ln(x)+1\right)^3}
\end{aligned}$$

לבסוף נבדוק את הגבול סביב $x=e^{-\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^+}\frac{x^2}{4\ln(x)+2} &= \lim_{y\to 0^+}\frac{e^{\frac{y-2}{2}}}{y} = e^{-1}\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y} = +\infty \\
\lim_{x\to\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^-}\frac{x^2}{4\ln(x)+2} &= \lim_{y\to 0^-}\frac{e^{\frac{y-2}{2}}}{y} = e^{-1}\lim_{y\to 0^-}\frac{1}{y} = -\infty
\end{aligned}$$

מה שעשינו זו החלפת המשתנים הבאה:

$$y = 4\ln(x) + 2. \tag{4.1}$$

ואז רואים שכאשר $x \to \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{+}$ לדוגמה. אז מקבלים

$$y \to 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{+} + 2 = -2^{+} + 2 = 0^{+}. \tag{4.2}$$

כאשר -2^{+} זה מספר שהוא טיפה קטן יותר מ -2. כמו כן מהקשר אפשר לקבל את x במונחי y :

$$\ln(x) = \frac{y-2}{4}, \tag{4.3}$$

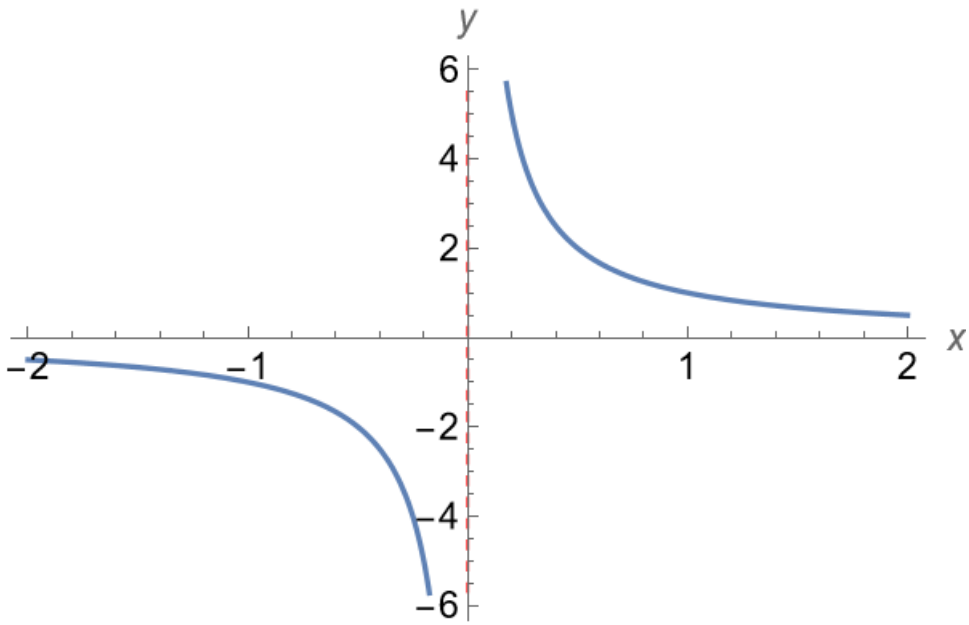
ואז לוקחים אקספוננט לשתי האגפים ומקבלים

$$x = e^{\frac{y-2}{4}}. \tag{4.4}$$

לבסוף השתמשנו בעובדה ש

$$\lim_{y\to 0^{+}} \frac{1}{y} = +\infty, \quad \lim_{y\to 0^{-}} \frac{1}{y} = -\infty \tag{4.5}$$

שאפשר לראות ממשית את ההתבדרויות סביב 0 בגרף



איור 2: הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$. רואים את התבדרות סביב הנקודה הסינגולרית $x = 0$.

5 דוגמה

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{|x-1|}{x+1}$. ציינו את תחום ההגדרה ובדקו רציפות וגזירות.

פתרון : ההגדרה של $|x-1|$ היא

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & x>1 \\ -(x-1) & x<1 \end{cases}. \tag{5.1}$$

תחום הגדרה: לפי המכנה כל x פרט ל- $x\neq -1$.

רציפות נובעת כאן ישירות מתחום הגדרה , לכן כל x פרט ל-$x\neq -1$.

גזירות: הנקודה המעיניית כאן היא $x=1$ בגלל הערך המוחלט. הערך המוחלט מתאפיין ב"שפיץ" סביב $x=1$. נבדוק זאת:

$$\begin{aligned} f'(x)|_{x=1} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{|1+h-1|}{1+h+1}-\frac{|1-1|}{1+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{|h|}{1+h+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{(2+h)\,h}. \end{aligned}$$

נבחן מסביב

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{(2+h)\,h} &= \frac{h}{(2+h)\,h}=\frac{1}{2}, \\ \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{(2+h)\,h} &= \frac{-h}{(2+h)\,h}=-\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש-

$$|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}. \tag{5.2}$$

קיבלנו ש-הנגזרת משמאל ומימין לא מסכימות, לכן הגבול לא קיים ומכאן שאין גזירות בנקודה $x=1$.

6 דוגמה

שאלה 4

מצאו את הגבול

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{\frac{11}{4}}}{x}=? \tag{6.1}$$

פתרון : נסתכל על המקרה כאשר $x\to\infty$ אז :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{\frac{11}{4}}}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{x}-\cancelto{0}{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{11}{4}}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{\sqrt{x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\\&=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}1-\cancel{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}+\cancel{\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}}}\\&=1.\end{aligned}$$

במקרה של $x\to-\infty$ אז :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{\frac{11}{4}}}{x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{x}-\cancelto{0}{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{11}{4}}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{-\sqrt{x^2}}.\end{aligned}$$

שימו לב למינוס שהיינו צריכים להוסיף. הסיבה היא שאנחנו צריכים לשמר את הסימן . במקור היה לנו $\frac{1}{x}$ אבל אז רשמנו $\frac{1}{\sqrt{x^2}}$ כדי להכניס את x לתוך השורש. אחד תלוי בסימן והשני תמיד חיובי. מאחר ו-x שלילי, יש להוסיף סימן מינוס.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{-\sqrt{x^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=-1. \tag{6.2}$$

7 דוגמה

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = e^x$. מצאו את הפונקציה ההופכית, הראו שהיא ההופכית וגזרו אותה. לאחר מכאן מצאו את הנגזרת שלה בעזרת הנוסחה למציאת נגזרות הופכיות.

פתרון : את הפונקציה ההופכית נקבל ע"י הפיכת הקשר. נסמן $y = e^x$ ואז ניקח לוגריתם

$$x = \ln y \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x. \tag{7.1}$$

כדי שהיא תיהיה הופכית צריך להתקיים $f^{-1}(f(x)) = x$, נבדוק

$$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x. \tag{7.2}$$

הנגזרת של $f^{-1}(x)$ ראינו בש"ב והיא $\frac{1}{x}$: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x}$. ננסה עכשיו לקבל את אותה תשובה בעזרת הנוסחה למציאת נגזרות הופכיות. לשם כך נצטרך קודם את הנגזרת של $f(x)$. אפשר להראות שהנגזרת של $f'(x) = e^x$. לכן

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \tag{7.3}$$

8 דוגמה

שאלה 6

הוכיחו את הזהות

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x). \tag{8.1}$$

פתרון : ניזכר בהגדרה של $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ו- $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. נוח כאן להתחיל מאגף ימין

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) + \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} \\
&= \cosh(2x).
\end{aligned}$$

9 דוגמה

שאלה 7

בעזרת הנוסחה לנגזרות הופכיות מצאו את הנגזרת של $\coth^{-1}(x)$.

פתרון : נסמן $f(x)=\coth(x)$ ו-$f^{-1}(x)=\coth^{-1}(x)$. אנחנו קודם צריכים את הנגזרת של $\coth(x)$:

$$\coth'(x)=\left(\frac{1}{\tanh(x)}\right)'=\frac{-\tanh'(x)}{\tanh^2(x)}=\frac{\tanh^2(x)-1}{\tanh^2(x)}, \tag{9.1}$$

כאשר בהרצאה ראיתם ש-

$$\frac{d}{dx}\tanh(x)=1-\tanh^2(x). \tag{9.2}$$

ונקבל

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{\tanh^2\left(\coth^{-1}(x)\right)}{\tanh^2\left(\coth^{-1}(x)\right)-1}. \tag{9.3}$$

נשאלת השאלה מה זה$\tanh\left(\coth^{-1}(x)\right)$. כדי להגיע לזה צריך קשר זהותי בין $\tanh(x)$ ל- $\coth(x)$ שדרכו נוכל להשתמש ב- $\coth\left(\coth^{-1}(x)\right)=x$. אנחנו יודעים שכמו ש- $\cot(x)=\frac{1}{\tan(x)}$, אותו קשר קיים במקרה שלנו. מכאן ש-

$$\tanh(x)=\frac{1}{\coth(x)}\Rightarrow\tanh\left(\coth^{-1}(x)\right)=\frac{1}{\coth\left(\coth^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{x}. \tag{9.4}$$

נציב חזרה לנוסחה

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\coth^{-1}(x)=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{1}{1-x^2}. \tag{9.5}$$

שאלה 8

העזרו בנגזרת של לוגריתם כדי למצוא את הנגזרת של הפונקציה

$$f(x) = \left(x^2+1\right)^{\tan x}. \tag{9.6}$$

פתרון : נסמן $y = \left(x^2+1\right)^{\tan x}$. ניקח לוגריתם לשתי האגפים

$$\ln y = \tan x \ln\left(x^2+1\right). \tag{9.7}$$

ניקח נגזרת לשתי האגפים לפי x. מאגף שמאל נקבל :

$$\frac{d}{dx}\ln y(x) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}. \tag{9.8}$$

כמו כן, מאגף ימין

$$\frac{d}{dx}\left[\tan x\left(x^2+1\right)\right] = \frac{1}{\cos^2(x)}\ln\left(x^2+1\right) + \tan(x)\frac{2x}{x^2+1}, \tag{9.9}$$

כאשר השתמשנו כאן בעובדה ש- $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2(x)}$. סה"כ קיבלנו

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos^2(x)}\ln\left(x^2+1\right) + \tan(x)\frac{2x}{x^2+1}\\ \frac{dy}{dx} &= \left(x^2+1\right)^{\tan x}\left[\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\cos^2(x)} + \frac{2x\tan(x)}{x^2+1}\right].\end{aligned}$$

תרגילון 1

הראו שהנגזרת של $f(x) = \frac{e^{x^n}}{1-mx}$ היא $f'(x) = \frac{e^{x^n}(mx-n(mx-1)x^n)}{x(mx-1)^2}$ כאשר m,n מספרים כלשהם.